10

المصطفى

المصطفى في الرياضيات

دليلك نحو التفوق والإبداع

حلول اسئلة الكتاب الوزاري

للصف العاشر الاساسي

العام الدراسي 2026-2027

الوحدة الثالثة

الهندسة : الدائرة



إعداد الأستاذ / مُنيب كُلاب

ماجستير الإحصاء التطبيقي

المصطفى - الصف العاشر - حلول الكتاب الوزاري - المصطفى

الوحدة الثالثة: الهندسة الدائرة

تمارين ومسائل (3 - 1): الدائرة

س1: أجدْ معادلة الدائرة في كلِّ حالةٍ ممّا يأتي:

أ) مركزُها $(٠ ، ٠)$، وطولُ نصفِ قطرها ٥ سم.

المعادلة الصورة القياسية: $س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}$

$س^{٢} + ص^{٢} = ٥^{٢} \Leftarrow س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$

ب) مركزُها $(-٣ ، ٢)$، وطولُ قطرها ٦ سم.

نصف القطر $نق = \frac{٦}{٢} = ٣$

$(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نق^{٢} \Leftarrow (س - (-٣))^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٣^{٢}$

$(س + ٣)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٩$

جـ) مركزُها $(-٢ ، -٧)$، وتمرُّ في النقطة $(٤ ، -٨)$.

حساب $نق^{٢}$ بمسافة بين نقطتين:

$نق^{٢} = (س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢} = (٤ - (-٢))^{٢} + (-٨ - (-٧))^{٢} = ٦^{٢} + (-١)^{٢} = ٣٦ + ١ = ٣٧$

$(س + ٢)^{٢} + (ص + ٧)^{٢} = ٣٧$

س2: أجدْ مركز الدائرة، وطول نصف قطرها في كلِّ حالةٍ ممّا يأتي:

أ) $س^{٢} + ص^{٢} - ١ = ٠$:

$س^{٢} + ص^{٢} = ١$

- **المركز:** $(٠ ، ٠)$
- **نصف القطر:** $نق = \sqrt{١} = ١$

ب) $(س - ٣)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٤٢$:

$(س - ٣)^{٢} + (ص - (-٤))^{٢} = ٤٢$

- **المركز:** $(٣ ، -٤)$
- **نصف القطر:** $نق = \sqrt{٤٢}$

جـ) $٦س^{٢} + ٦ص^{٢} = ٣٦$:

بالقسمة على 6: $س^{٢} + ص^{٢} = ٦$

- **المركز:** $(٠ ، ٠)$
- **نصف القطر:** $نق = \sqrt{٦}$

د) $س^{٢} + ص^{٢} - ١٢س = ١٤$:

بالترتيب: $س^{٢} + ص^{٢} - ١٢س - ١٤ = ٠$

بالمقارنة بالصورة القياسية:

$٢ل = -١٢ \Leftarrow ل = -٦ ، ٢ك = ٠ \Leftarrow ك = ٠ ، جـ = -١٤$

- **المركز:** $(-ل ، -ك) = (٦ ، ٠)$
- **نصف القطر:**

$نق = \sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - جـ} = \sqrt{(-٦)^{٢} + ٠^{٢} - (-١٤)}$

$= \sqrt{٣٦ + ١٤} = \sqrt{٥٠} = ٢\sqrt{٥}$

أ. منيب كلاب 00972599570709

س3: أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ معادلةُ دائرة؟

أ) $س^{٢} - ص^{٢} = ٣٦$:
ليست معادلة دائرة (معامل $ص^{٢}$ بالسالب).

ب) $س^{٢} + ص^{٢} - ٤س = ٩$:
نعم، تمثل معادلة دائرة؛ لأن معامل $س^{٢}$ يساوي معامل $ص^{٢}$ (= 1)، ولا تحتوي على س ص، وبالصورة القياسية:
$س^{٢} + ص^{٢} - ٤س - ٩ = ٠$
حيث: $ل٢ = -٤ \Leftarrow ل = -٢$ ، $ك٢ = ٠ \Leftarrow ك = ٠$ ، $جـ = -٩$
وشرط نصف القطر محقق:
$ل^{٢} + ك^{٢} - جـ = (-٢)^{٢} + ٠^{٢} - (-٩) = ٤ + ٩ = ١٣ > ٠$

جـ) $٨س^{٢} + ٨ص^{٢} + ٢س ص = ١٠$:
ليست معادلة دائرة (تحتوي على حد يشتمل على ضرب المتغيرين س ص).

د) $س^{٢} + ٢ص^{٢} - ٥ = ٠$:
ليست معادلة دائرة (معامل $س^{٢}$ لا يساوي معامل $ص^{٢}$).

هـ) $س^{٢} + ص^{٢} - ٢س + ٣ص = ٠$:
نعم، تمثل معادلة دائرة؛ لأن معاملات $س^{٢}$ و $ص^{٢}$ متساوية (= 1)، ولا تحتوي على س ص، وشرط نصف القطر محقق:
$ل٢ = -٢ \Leftarrow ل = -١$ ، $ك٢ = ٣ \Leftarrow ك = \frac{٣}{٢}$ ، $جـ = ٠$
$ل^{٢} + ك^{٢} - جـ = (-١)^{٢} + (\frac{٣}{٢})^{٢} - ٠ = ١ + \frac{٩}{٤} = \frac{١٣}{٤} > ٠$

س4: أجدُ قيمة ك التي تجعلُ نصفَ قطرِ الدائرةِ الآتيةِ ٥ وحدات: $س^{٢} + ص^{٢} + ٤س + ٢ك ص - ١٢ = ٠$

من الصورة القياسية لمعادلة الدائرة:
$ل٢ = ٤ \Leftarrow ل = ٢$ ، $ك٢ = ٢ \Leftarrow$ معامل ص النصف هو ك ، $جـ = -١٢$
قانون نصف القطر: $نق = \sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - جـ}$
$٥ = \sqrt{٢^{٢} + ك^{٢} - (-١٢)}$
بتربيع الطرفين: $٢٥ = ٤ + ك^{٢} + ١٢$
$٢٥ = ١٦ + ك^{٢} \Leftarrow ك^{٢} = ٢٥ - ١٦ = ٩$
$ك = \pm ٣$

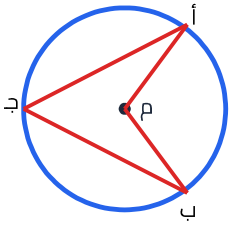
س5: رسم معلم التربية الرياضية دائرة في وسط ملعب كرة القدم، وافترض أن الدائرة مرسومة في مستوى ديكارتي مركزها $(-٢ ، ٤)$، ونصف قطرها ٦ م. ما معادلتها؟

المركز $(د ، هـ) = (-٢ ، ٤)$، ونصف القطر $نق = ٦$
الصورة القياسية للمعادلة بمساعدة المركز ونصف القطر:
$(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نق^{٢}$
$(س - (-٢))^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٦^{٢}$
$(س + ٢)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٣٦$

أ. منيب كلاب 00972599570709

تمارين ومسائل (3 - 2): الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

س1: الشكل المجاور فيه م مركز الدائرة، فإذا كان قياس ∠أمب = ١٣٠°، أجد ∠أجب.

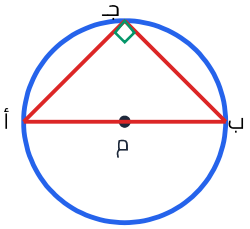


الزاوية أجب محيطية والزاوية أمب مركزية تشتركان في القوس أب.

$\text{قاس أجب} = \frac{1}{2} \times \text{قاس أمب}$

$\text{قاس أجب} = \frac{1}{2} \times 130^\circ \Leftarrow \text{قاس أجب} = 65^\circ$

س2: أبيّن أن قياس الزاوية المحيطية المرسومة على قطر الدائرة تساوي ٩٠°.



- لتكن القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ قطراً في الدائرة التي مركزها م.
- القطر $\overline{أب}$ يشكل زاوية مركزية مستقيمة قياسها ∠أمب = ١٨٠°.
- لتكن ∠أجب زاوية محيطية مرسومة على القطر $\overline{أب}$ وتشارك الزاوية المركزية في نفس القوس $\overset{\frown}{أب}$.
- وبما أن قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه:

$\text{قاس أجب} = \frac{1}{2} \times \text{قاس أمب}$

$\text{قاس أجب} = \frac{1}{2} \times 180^\circ \Leftarrow \text{قاس أجب} = 90^\circ$.

س3: أجد قيمة المجهول في الأشكال الآتية، حيث م مركز الدائرة:

1) الشكل الأول:

الزاوية المركزية = ١١٠°.

الزاوية المحيطية س = $\frac{110^\circ}{2}$

$\Leftarrow$ س = ٥٥°

2) الشكل الثاني:

الزاوية المحيطية = ٥٠°.

الزاوية المركزية ص + ٣٠° =

٢ × ٥٠° = ١٠٠°

ص = ١٠٠° − ٣٠° $\Leftarrow$ ص = ٧٠°

3) الشكل الثالث:

الزاوية ص هي زاوية محيطية تشترك مع الزاوية المركزية أمب = ١٨٠°

في نفس القوس

الزاوية ص = ١٨٠° × $\frac{1}{2}$ = ٩٠°

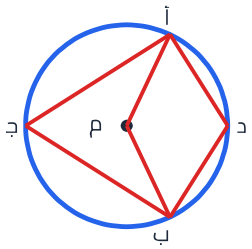
الزاوية

س = ١٨٠ − (٩٠° + ٤٠°) = ٥٠°

س = ٥٠°، ص = ٤٠°

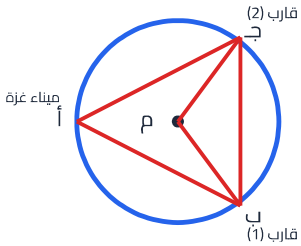
أ. منيب كلاب 00972599570709

س4: في الشكل المجاور دائرة مركزها م، فيها دأدب = ١٤٠° **. أجد:** دأمب **المنعكسة، و** دأجب.



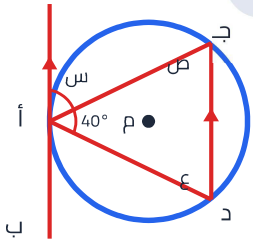
- دأمب المنعكسة تشترك مع المحيطية دأدب في القوس الأكبر أجب:
  دأمب المنعكسة = ٢ × ١٤٠° ⇐ دأمب **المنعكسة** = ٢٨٠°
- المركزية الصغرى دأمب = ٣٦٠° − ٢٨٠° = ٨٠°.
- المحيطية دأجب تشترك مع المركزية الصغرى في القوس الأصغر أدب:
  دأجب = $\frac{٨٠°}{٢}$ ⇐ دأجب = ٤٠°

س5: دائرة مركزها م، وفيها د 30° = مبجـ **أجد** دبأجـ.



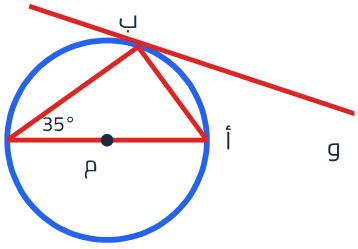
- في المثلث Δمبجـ: مجـ = مب (أنصاف أقطار).
- دمجب = دمبجـ = ٣٠°.
- المركزية دبمجـ = ١٨٠° − (٣٠° + ٣٠°) = ١٢٠°.
- المحيطية دبأجـ = $\frac{١٢٠°}{٢}$ ⇐ دبأجـ = ٦٠°

س6: في الشكل المجاور $\overleftrightarrow{ب أ}$ **مماس للدائرة يوازي الوتر** $\overline{جـد}$**، أجد قياس جميع الزوايا المشار إليها بالرموز حيث م مركز الدائرة.**



- بما أن $\overleftrightarrow{أب}$ || $\overline{جد}$ (المماس يوازي الوتر)⇐ - بالتبادل الداخلي: ص = س
- بتطبيق نظرية الزاوية المماسية والمحيطية:
  - المماسية س المحصورة بين المماس والوتر أجـ تساوي المحيطية ع⇐ س = ع
- بالتعويض: ٤٠° + ص + ع = ١٨٠° ⇐
  ٤٠° + س + س = ١٨٠°
  ٢س + ٤٠° = ١٨٠° ⇐ ٢س = ١٤٠° ⇐ س = ٧٠°
- إذن قياس الزوايا هو: ⇐ س = ٧٠° ص = ٧٠° ع = ٧٠°

س7: أجد قياس الزاوية ∠وبأ **في الشكل المجاور.**



- الزاوية المماسية ∠وبأ محصورة بين المماس $\overleftrightarrow{وب}$ والوتر $\overline{أب}$:
  - تقابل القوس نفسه الذي تقابله الزاوية المحيطية المعطاة (٣٥°).
- بتطبيق نظرية الزاوية المماسية والمحيطية المشتركتين في القوس نفسه:
  ∠وبأ = الزاوية المحيطية المقابلة للوتر ب أ
- إذن قياس الزاوية المماسية هو:
  ∠وبأ = ٣٥°

تمارين ومسائل (3 - 2): الشكل الرباعي الدائري

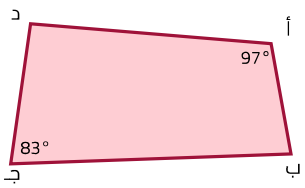
س1: أُبيّنُ أيّ الأشكالِ الآتيةِ تمثّلُ شكلًا رباعيًّا دائريًّا.

- **الشكل (أ):**

مجموع الزاويتين المتقابلتين: $\angle أ + \angle جـ = ٩٧^\circ + ٨٣^\circ = ١٨٠^\circ$.

بما أن الزاويتين المتقابلتين متكاملتان:

⇐ **الشكل يمثّل شكلًا رباعيًّا دائريًّا.**



- **الشكل (ب):**

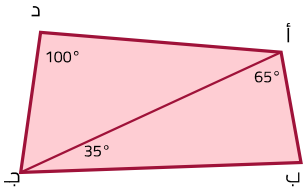
في المثلث Δأبجـ: مجموع الزوايا $= ١٨٠^\circ$.

$\angle$أبجـ $= ١٨٠^\circ - (٣٥^\circ + ٦٥^\circ) = ٨٠^\circ$.

الزاويتان المتقابلتان $\angle$أبجـ و $\angle$أدجـ متكاملتان ومجموعهما $= ١٨٠^\circ$.

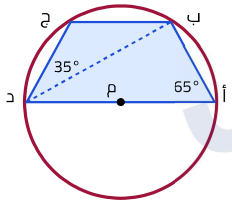
بما أن الزاويتين المتقابلتين متكاملتان:

⇐ **الشكل يمثّل شكلًا رباعيًّا دائريًّا.**



س2: أبجد **شكلٌ رباعيٌّ دائريٌّ، فيه قياس الزاوية** $\angle$بدجـ $= ٣٠^\circ$، **أجد قياس** $\angle$بجد ، **وقياس** $\angle$أبجـ.

- بما أن أبجد شكل رباعي دائري فإن كل زاويتان متقابلتان ومجموعهما ١٨٠°
- $\angle$بأد $= ٦٥^\circ$ تقابل $\angle$بجد $= ١٨٠^\circ - ٦٥^\circ = ١١٥^\circ$
- ⇐ $\angle$بجد $= ١١٥^\circ$
- $\angle$أبد $= ٩٠^\circ$ (لأنها زاوية محيطية تقع على قطر الدائرة)
- $\angle$جبد $= ١٨٠^\circ - (٣٥^\circ + ١١٥^\circ) = ٣٠^\circ$ (مجموع زوايا المثلث $= ١٨٠^\circ$)
- $\angle$أبجـ $= \angle$أبد $+ \angle$جبد $= ٩٠^\circ + ٣٠^\circ = ١٢٠^\circ$ ⇐ $\angle$أبجـ $= ١٢٠^\circ$



س3: أبجد **شكلٌ رباعيٌّ دائريٌّ، فيه** $\angle أ = ٤س + ٢٠^\circ$، $\angle جـ = ٣س + ١٣^\circ$، **أجد قيمة** س **بالدرجات، ثم أجد قياس زاوية** أ **وزاوية** جـ.

- الزاويتان المتقابلتان متكاملتان: $\angle أ + \angle جـ = ١٨٠^\circ$

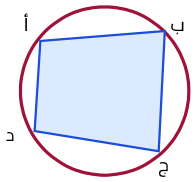
$(٤س + ٢٠^\circ) + (٣س + ١٣^\circ) = ١٨٠^\circ$

$٧س + ٣٣^\circ = ١٨٠^\circ$ ⇐ $٧س = ١٤٧^\circ$ ⇐ $س = ٢١^\circ$

- التعويض لحساب الزوايا:

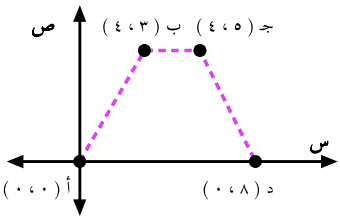
$\angle أ = ٤(٢١^\circ) + ٢٠^\circ$ ⇐ $\angle أ = ١٠٤^\circ$

$\angle جـ = ٣(٢١^\circ) + ١٣^\circ$ ⇐ $\angle جـ = ٧٦^\circ$



أ منيب كلاب 00972599570709

س4: في يوم الأرض وعلى لوحة كرتونية ، مثّلت هند مواقع لأربعة قرى فلسطينية مهجرة ، كما في الشكل المجاور



- **(أ) ما اسم الشكل الهندسي الذي يصل بين النقاط:**

القاعدة $\overline{أد}$ على محور السينات وطولها = ٨، والقاعدة $\overline{ب جـ}$ || $\overline{أد}$ وطولها = ٢.

طول الساق الأولى أب = $\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}$ = ٥، وطول الساق الثانية

جد = $\sqrt{(٨ - ٥)^٢ + (٠ - ٤)^٢}$ = ٥.

⇐ **الشكل هو شبه منحرف متساوي الساقين.**

- **(ب) أبين أن الشكل هو رباعي دائري:**

بما أن الساقين متساويان، فإن زوايا القاعدة متساوية والزاويتان المتقابلتان متكاملتان.

$\angle أ + \angle ب = ١٨٠^\circ$ (بالتحالف)

$\angle أ = \angle د$ (شبه منحرف متساوي الساقين)

$\angle د + \angle ب = ١٨٠^\circ$ (وهما زاويتان متقابلتان)

⇐ **الشكل أب جد يمثّل شكلًا رباعيًّا دائريًّا.**

أ. منيب كلاب 00972599570709

تمارين الوحدة

س1: أضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ فيما يأتي:

1) ما طول نصف قطر الدائرة التي معادلتها: $(س - ٥)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٦٤$؟

$نق^{٢} = ٦٤ \Leftarrow نق = \sqrt{٦٤} = ٨$سم.

⇐ **الإجابة الصحيحة: (د) ٨ سم.**

2) قياس زاوية مركزية في دائرة مركزها م يساوي ١٠٠°، فما قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس؟

الزاوية المحيطية $= \frac{١}{٢} \times$ الزاوية المركزية $= \frac{١}{٢} \times ١٠٠^{\circ} = ٥٠^{\circ}$.

⇐ **الإجابة الصحيحة: (ب) ٥٠°.**

3) ما العلاقة بين كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري؟

من خصائص الشكل الرباعي الدائري أن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.

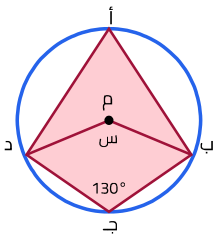
⇐ **الإجابة الصحيحة: (جـ) متكاملتان.**

4) ما قياس الزاوية المحيطية المرسومة على قطر الدائرة؟

الزاوية المحيطية المرسومة على قطر الدائرة تكون دائمًا قائمة (٩٠°).

⇐ **الإجابة الصحيحة: (أ) ٩٠°.**

5) في الشكل المجاور: إذا كان م مركز دائرة، فيها $\angle$ب جـ د $= ١٣٠^{\circ}$، فما قيمة س؟



الشكل الرباعي أ ب جـ د دائري ⇐ $\angle$ب أ د $= ١٨٠^{\circ} - ١٣٠^{\circ} = ٥٠^{\circ}$.

الزاوية المركزية $\angle$ب م د $= ٢ \times \angle$ب أ د $= ٢ \times ٥٠^{\circ} = ١٠٠^{\circ}$.

⇐ **الإجابة الصحيحة: (د) ١٠٠°.**

س2: أجدُ معادلةَ الدائرةِ في الحالاتِ الآتيةِ:

- **(أ) مركزها $(-٥ ، ١)$، وتمر بالنقطة $(٢ ، ٤)$:**

حساب نصف القطر نق $= \sqrt{(٢ - (-٥))^{٢} + (٤ - ١)^{٢}} = \sqrt{٣^{٢} + ٧^{٢}} = \sqrt{٩ + ٤٩} = \sqrt{٥٨}$.

نق$^{٢} = ٥٨ \Leftarrow$ المعادلة هي: $(س + ٥)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = ٥٨$

- **(ب) نهايتا قطر فيها النقطتان: أ$(٧ ، ١٢)$، ب$(-٥ ، -٤)$:**

المركز هو منتصف القطر: م $= \left(\frac{٧+(-٥)}{٢} ، \frac{١٢+(-٤)}{٢}\right) = (١ ، ٤)$.

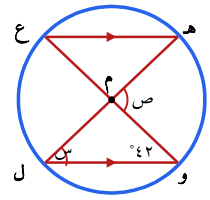
نصف القطر: نق $= \sqrt{(٧ - ١)^{٢} + (١٢ - ٤)^{٢}} = \sqrt{٨^{٢} + ٦^{٢}} = \sqrt{٦٤ + ٣٦} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$.

نق$^{٢} = ١٠٠ \Leftarrow$ المعادلة هي: $(س - ١)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ١٠٠$

أ. منيب كلاب 00972599570709

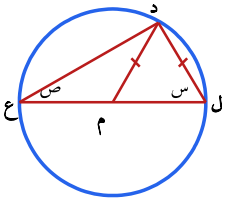
س3: أجدُ قياساتِ الزوايا المجهولةِ في الأشكالِ الآتيةِ:

- **الشكل الأول:**



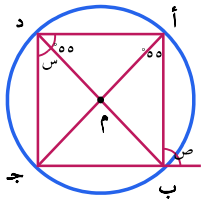
الزاويتان المحيطيتان ∠هـ و ∠و مرسومتان على القوس نفسه ع ل ⇐ ∠هـ = ∠و = ٤٢°.
بما أن هـ ع ∥ و ل، فإن ∠س = ∠هـ = ٤٢° (بالتبادل).
الزاوية ص هي زاوية خارجة عن المثلث Δو م ل، فتساوي مجموع الزاويتين الداخليتين البعيدتين:
ص = ∠س + ∠و = ٤٢° + ٤٢° ⇐ ص = ٨٤°.
س = ٤٢°، ص = ٨٤°.

- **الشكل الثاني:**



بما أن ل م و د م أنصاف أقطار في الدائرة ⇐ ل م = د م.
وبما أن د م = د ل (معطى في الشكل)، فإن المثلث Δد م ل متساوي الأضلاع.
⇐ قياس الزاوية س = ٦٠°.
الزاوية المحيطية المرسومة على القطر قائمة ∠ل د ع = ٩٠°.
الزاوية ص متممة للزاوية س في المثلث القائم Δل د ع:
ص = ٩٠° − ٦٠° ⇐ ص = ٣٠°.

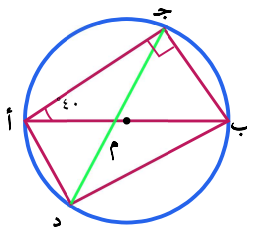
- **الشكل الثالث:**



بما أن ∠ب أجـ و ∠ب دجـ زاويتان محيطيتان مرسومتان على القوس نفسه ب جـ،
⇐ إذن س = ٥٥°.
بما أن الشكل أ ب جـ د رباعي دائري، فإن الزاوية الخارجية عند الرأس ب (الزاوية ص) تساوي الزاوية الداخلية المقابلة للمجاورة لها (∠أدجـ)،
⇐ وبما أن ∠أدجـ = ∠أدب + س = ٥٥° + ٥٥° = ١١٠°،
⇐ إذن ص = ١١٠°.

س4: أجب: د شكلٌ رباعيٌّ دائريٌّ مرسومٌ داخلَ دائرةٍ مركزُها م، إذا كانَ أب قطرًا في الدائرةِ، وكانَ قياسُ الزاويةِ ∠ب أجـ = ٤٠°، أجدُ قياسَ الزاويةِ ∠أدجـ

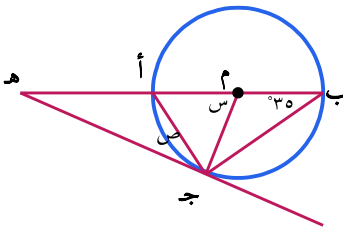
- بما أن أ ب قطر في الدائرة، فإن الزاوية المحيطية المرسومة عليه قائمة:
∠أجب = ٩٠°



- في المثلث القائم Δأب جـ:
∠أبجـ = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٠°) = ٥٠°

- ∠أبجـ = ∠أدجـ = ٥٠° (زاويتان محطيتان على نفس القوس)
⇐ ∠أدجـ = ٥٠°

س5: في الشكلِ المجاورِ أجدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليها بالرموزِ.



- **إيجاد قياس الزاوية** س :

بما أن الزاوية ∠أمجـ (الزاوية س) زاوية مركزية والزاوية ∠أبجـ = ٣٥° زاوية محيطية تشتركان في القوس نفسه $\overset{\frown}{أجـ}$

⇐ فإن الزاوية المركزية تساوي ضعف الزاوية المحيطية:

س = ٢ × ٣٥° = ٧٠°.

- **إيجاد قياس الزاوية** ص :

بما أن الزاوية ص زاوية مماسية محصورة بين المماس والوتر $\overline{أجـ}$ والزاوية ∠أبجـ زاوية محيطية مرسومة على القوس نفسه $\overset{\frown}{أجـ}$

⇐ فإن الزاوية المماسية تساوي الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس:

ص = ∠أبجـ = ٣٥°.

أ. منيب كلاب
00972599570709