10

المصطفى

المصطفى في الرياضيات

دليلك نحو التفوق والإبداع

حلول اسئلة الكتاب الوزاري

للصف العاشر الاساسي

العام الدراسي 2026-2027

الوحدة الثانية

الاقترانات ورسومها البيانية



إعداد الأستاذ / مُنيب كُلاب

ماجستير الإحصاء التطبيقي

المصطفى - حلول الكتاب الوزاري - الصف العاشر

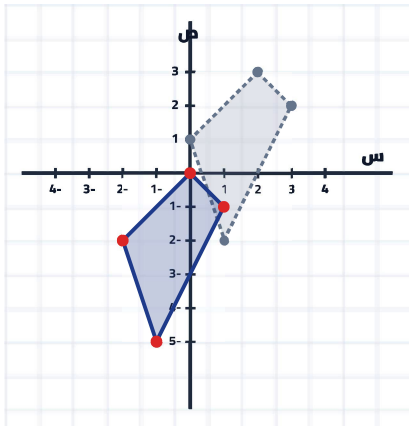
الوحدة الثانية: الاقترانات ورسومها البيانية

تمارين ومسائل (2 - 1): تمثيل الاقترانات باستخدام الانسحاب

(1) أرسم الشكل الرباعي المرسوم في المستوى الديكارتي بعد انسحابه وحدتين إلى اليسار، ومن ثم 3 وحدات إلى الأسفل.

قاعدة التحويل: (س ، ص) ← (س − ٢ ، ص − ٣)

الرأس الأصلي	التحويل الهندسي	الرأس الجديد
(٣ ، ٢)	(٢ − ٣ ، ٢ − ٣)	(٠ ، ٠)
(٢ ، ٣)	(٣ − ٢ ، ٢ − ٣)	(١− ، ١)
(١ ، ٢−)	(١ − ٢ ، ٢ − ٣)	(٥− ، ١−)
(٠ ، ١)	(٠ − ٢ ، ١ − ٣)	(٢− ، ٢−)



(2) بالاعتماد على منحنى ص = ق(س) ، س ≤ ٠ الممثّل في المستوى الديكارتي، أمثّل منحنى كل من الاقترانات الآتية في المستوى نفسه:

نقطة بداية الاقتران الأصلي ق(س): هي (٠ ، −٢) ويمر بالنقطة (٤ ، ٠).

أ) هـ(س) = ق(س) − ٥

انسحاب رأسي بمقدار 5 وحدات إلى الأسفل.

تبدأ من (٠ ، −٧) وتمر بـ (٤ ، −٥).

ب) ل(س) = ق(س + ٤)

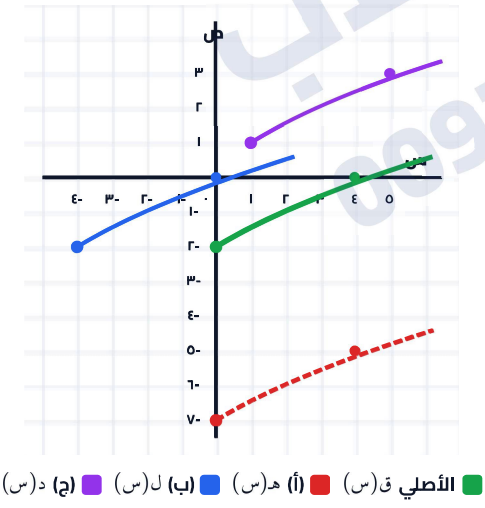
انسحاب أفقي بمقدار 4 وحدات إلى اليسار.

تبدأ من (−٤ ، −٢) وتمر بـ (٠ ، ٠).

ج) د(س) = ق(س − ١) + ٣

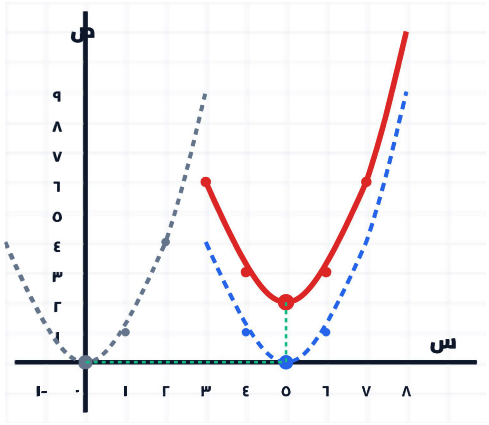
انسحاب أفقي وحدة لليمين ورأسي 3 وحدات للأعلى.

تبدأ من (١ ، ١) وتمر بـ (٥ ، ٣).



أ. منيب كلاب 00972599570709

(3) باستخدام طريقة إكمال المربع، أرسم منحنى الاقتران: هـ(س) = س^{٢} − ١٠س + ٢٧ ، **اعتماداً على منحنى** ق(س) = س^{٢}.



1) إكمال المربع:

هـ(س) = (س^{٢} − ١٠س + ٢٥) − ٢٥ + ٢٧

هـ(س) = (س − ٥)^{٢} + ٢

2) التحويلات الهندسية المتسلسلة:

- ق(س) = س^{٢} : المنحنى الأصلي ورأسه عند النقطة (٠ ، ٠).
- (س − ٥)^{٢} : انسحاب أفقي بمقدار 5 وحدات لليمين، ورأسه (٥ ، ٠).
- هـ(س): انسحاب رأسي بمقدار وحدتين للأعلى، ورأسه (٥ ، ٢).

أ. منيب كلاب
00972599570709

تمارين ومسائل (2-2): تمثيل الاقترانات باستخدام الانعكاس

السؤال (1): أكتب الزوج المرتب الذي يمثل التحويلات الهندسية على النقطة $(٣ ، -٤)$ في الحالات الآتية:

أ) انعكاس في محور الصادات:

تتغير إشارة الإحداثي السيني لتصبح $(-٣ ، -٤)$

ب) انعكاس في محور السينات:

تتغير إشارة الإحداثي الصادي لتصبح $(٣ ، ٤)$

السؤال (2): أصف بالكلمات التحويلات الهندسية الآتية على منحنى ق(س):

أ) $ق(-س)$

انعكاس لمنحنى الاقتران ق(س) حول محور الصادات .

ب) $-ق(س) + ١$

انعكاس لمنحنى الاقتران ق(س) حول محور السينات ، ثم انسحاب بمقدار وحدة واحدة إلى الأعلى.

جـ) $ق(س - ٢) + ٣$

انسحاب لمنحنى الاقتران ق(س) بمقدار وحدتين إلى اليمين، ثم انسحاب بمقدار ٣ وحدات إلى الأعلى.

السؤال (3): اعتماداً على منحنى ق(س) المرسوم، أرسم منحنيات الاقترانات الآتية:

أ) $هـ(س) = ق(-س) - ١$

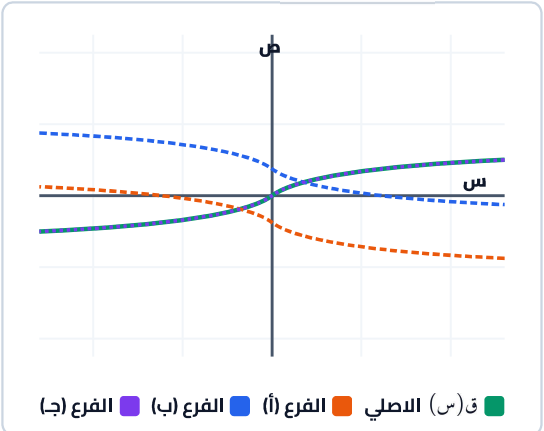
التحويلات: انعكاس حول محور الصادات، ثم إزاحة لأسفل بمقدار وحدة واحدة.

ب) $ك(س) = -ق(س) + ١$

التحويلات: انعكاس حول محور السينات، ثم إزاحة لأعلى بمقدار وحدة واحدة.

جـ) $م(س) = -ق(-س)$

التحويلات: انعكاس حول محور الصادات ومحور السينات (أو انعكاس حول نقطة الأصل).



تمارين ومسائل (2 - 3) : إشارة الإقتران

(1) أُعيّنُ إشارةَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

أ) هـ(س) = ٤ − س

- **صفر الاقتران:** ٤ − س = ٠ ⇐ س = ٤
- **الإشارة:** موجب (+): س < ٤ | صفر: س = ٤ | سالب (-): س > ٤



ب) جـ(س) = −٤ − ٤س − س²

- جـ(س) = −(س² + ٤س + ٤) = −(س + ٢)² (جذر مكرر عند س = −٢)
- **الإشارة:** سالب (-) دائماً لجميع س ≠ −٢ | تساوي صفر عند س = −٢



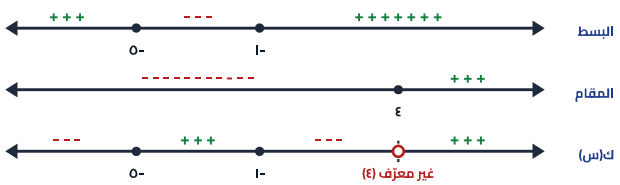
جـ) م(س) = $\frac{-١}{س}$ ، س ≠ ٠

- البسط سالب دائماً، وصفر المقام عند س = ٠
- **الإشارة:** موجب (+): س > ٠ | غير معرّف: س = ٠ | سالب (-): س < ٠



د) ك(س) = $\frac{س^{٢}+٦س+٥}{س-٤}$ ، س ≠ ٤

- أصفار البسط: س = −١ ، س = −٥ | صفر المقام: س = ٤
- **الإشارة:** سالب (-): (−∞ ، −٥) | موجب (+): (−٥ ، −١) | سالب (-): (−١ ، ٤) | موجب (+): (٤ ، ∞)



(2) أُعيّنُ إشارةَ الاقترانِ ق على الفترةِ [−٣ ، ٤] من الرسمِ البيانيِّ المرفق:

- أصفار الاقتران (نقاط التقاطع مع محور السينات): س = −٣ ، ٠ ، ٣
- **سالب (-)** على الفترة [−٣ ، ٠) (لأن المنحنى تحت محور السينات)
- **موجب (+)** على الفترة (٠ ، ٣) (لأن المنحنى فوق محور السينات)
- **سالب (-)** على الفترة (٣ ، ٤] (لأن المنحنى تحت محور السينات)

تمارين ومسائل (2 - 4) : حل المتباينات

(1) ما مجموعةُ حلِّ المتباينات الآتيةِ؟

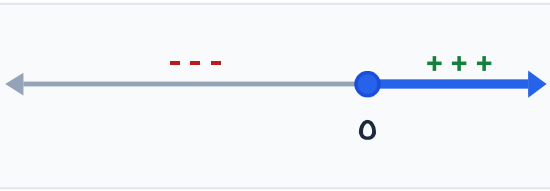
أ) $٢(س + ١) \geq ٣(س - ١)$

- **خطوات الحل:**

$٢س + ٢ \geq ٣س - ٣$

$٢ + ٣ \geq ٣س - ٢س \Leftarrow ٥ \geq س$ أي $س \leq ٥$

- **مجموعة الحل:** $[٥ ، \infty)$



ب) $س^{٢} + س + ١ > ٠$

- **المميز (Δ):** $ب^{٢} - ٤أجـ = ١^{٢} - ٤(١)(١) = -٣ < ٠$
- لا توجد أصفار حقيقية، والإشارة تتبع معامل $س^{٢}$ (موجبة دائماً).
- **مجموعة الحل:** المجموعة الخالية $\emptyset$



(2) ما هي الأعدادُ التي مربّعُ كلٍّ منها أصغرُ من العددِ نفسِه؟

- **صياغة المتباينة:** $س^{٢} < س \Leftarrow س^{٢} - س < ٠$
- **أصفار المعادلة:** $س(س - ١) = ٠ \Leftarrow س = ٠$ أو $س = ١$
- **دراسة الإشارة:** تكون العبارة سالبة (أصغر من صفر) بين الصفر والواحد.
- **الأعداد هي:** جميع الأعداد الحقيقية المحصورة في الفترة المفتوحة $(٠ ، ١)$

(3) أكْتُبُ المتباينةَ من الدرجةِ الثانيةِ التي تظهرُ مجموعةُ حلِّها على خطِّ الأعدادِ الآتي:

- **تحليل خط الأعداد:**

- الجذران هما: $س_{١} = -١$ و $س_{٢} = ٣$

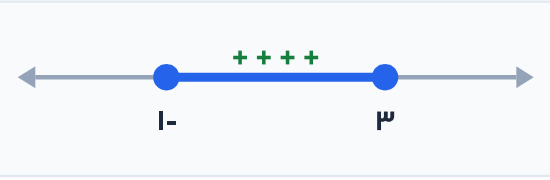
- المنطقة المظللة (الموجبة) بين الجذرين: $-١ \geq س \geq ٣$

- **تكوين المتباينة:**

نضرب العاملين: $(س + ١)(س - ٣) = س^{٢} - ٢س - ٣$

بما أن الإشارة موجبة بين الجذرين، نعكس إشارة معامل $س^{٢}$:

المتباينة هي: $-س^{٢} + ٢س + ٣ > ٠$ أو $(س + ١)(٣ - س) > ٠$



(4) محلٌّ لبيعِ الفطائرِ حدَّدَ ربحَهُ بالعلاقةِ: الربح $= -١٠٠(س - ١.٧٥)^{٢} + ٣٠٠$، حيث $س$ سعر بيع الفطيرة الواحدة ، فكم دينارا يربح صاحب المحل (يزيد الربح كلما كان سعر الفطيرة أقل).

أ) إذا باعَ الفطيرةَ بسعرِ ١.٥ دينار:

الربح $= -١٠٠(١.٥ - ١.٧٥)^{٢} + ٣٠٠ = -١٠٠(-٠.٢٥)^{٢} + ٣٠٠ = -١٠٠(٠.٠٦٢٥) + ٣٠٠ = -٦.٢٥ + ٣٠٠ = ٢٩٣.٧٥$ **ديناراً.**

ب) إذا باعَ الفطيرةَ بسعرِ ٣.٧٥ دنانير:

الربح $= -١٠٠(٣.٧٥ - ١.٧٥)^{٢} + ٣٠٠ = -١٠٠(٢)^{٢} + ٣٠٠ = -١٠٠(٤) + ٣٠٠ = -٤٠٠ + ٣٠٠ = -١٠٠$ **دينار (خسارة 100 دينار).**

جـ) ما السعرُ الذي يمكنُ أنْ يبيعَ بهِ الفطيرةَ؛ ليكونَ ربحُهُ أكثرَ من ٢٧٥ ديناراً؟

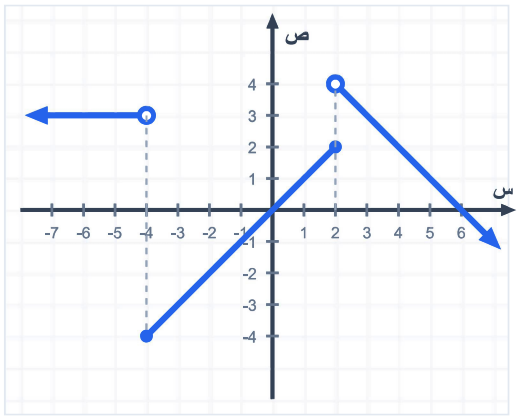
- **نضع المتباينة:** $-١٠٠(س - ١.٧٥)^{٢} + ٣٠٠ > ٢٧٥$
- $-١٠٠(س - ١.٧٥)^{٢} > -٢٥$
- **بنظام القسمة على** -١٠٠ **وتغيير اتجاه المتباينة:** $(س - ١.٧٥)^{٢} < ٠.٢٥$
- **بأخذ الجذر التربيعي للطرفين:** $|س - ١.٧٥| < ٠.٥$
- $-٠.٥ < س - ١.٧٥ < ٠.٥ \Leftarrow ١.٢٥ < س < ٢.٢٥$
- **إذن: السعر المحتمل ينبغي أن يكون أكبر من ١.٢٥ دينار وأقل من ٢.٢٥ دينار .**

أ. منيب كلاب 00972599570709

تمارين ومسائل (2 - 5) : الإقترانات متعددة القاعدة

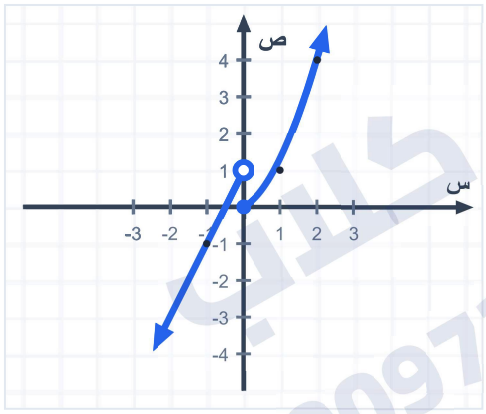
(1) أَرْسُمُ منحنى كُلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) $ق(س) = \begin{cases} ٣ & ، \quad س < -٤ \\ س & ، \quad -٤ \leq س \leq ٢ \\ -س + ٦ & ، \quad س > ٢ \end{cases}$



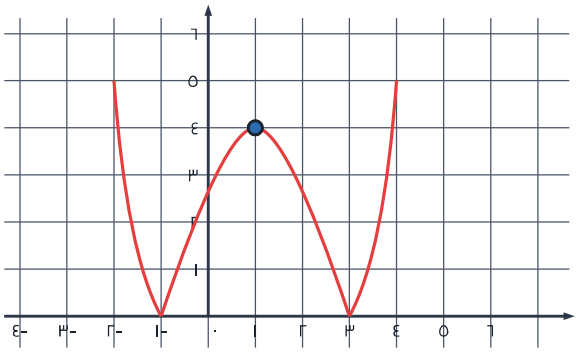
- **القاعدة الأولى** ($س < -٤$): شعاع أفقي عند $ص = ٣$ يبدأ بدائرة مفتوحة عند $(-٤ ، ٣)$ ويمتد يساراً.
- **القاعدة الثانية** ($-٤ \leq س \leq ٢$): قطعة مستقيمة تبدأ من $(-٤ ، -٤)$ وتنتهي عند $(٢ ، ٢)$ (مغلقين).
- **القاعدة الثالثة** ($س > ٢$): شعاع يبدأ من $(٢ ، ٤)$ (دائرة مفتوحة) ويمر بالنقطة $(٦ ، ٠)$ ممتداً لليمين أسفل محور السينات.

ب) $ق(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & ، \quad س > ٠ \\ س^{٢} & ، \quad س \leq ٠ \end{cases}$



- **القاعدة الأولى** ($س > ٠$): شعاع خطي يبدأ بدائرة مفتوحة عند $(٠ ، ١)$ ويمتد لليسار للأسفل مراراً بنقاط مثل $(-١ ، -١)$ و $(-٢ ، -٣)$.
- **القاعدة الثانية** ($س \leq ٠$): منحنى مكافئ (تربيعي) يبدأ من نقطة الأصل $(٠ ، ٠)$ مغلقة ويمتد لليمين للأعلى مراراً بنقاط مثل $(١ ، ١)$ و $(٢ ، ٤)$.

(2) للاقترانِ الذي يظهرُ منحناهُ في المستوى الديكارتي أدناهُ: ما إحداثيّاتُ نقطةِ الرأسِ؟ وما معادلةُ محورِ تماثُلِ المنحنى؟



- **إحداثيّات نقطة الرأس:** $(١ ، ٤)$ (النقطة العظمى في المنتصف).
- **معادلة محور التماثل:** الخط الرأسي الذي ينصف الشكل تماماً هو $س = ١$.

أ. منيب كلاب 00972599570709

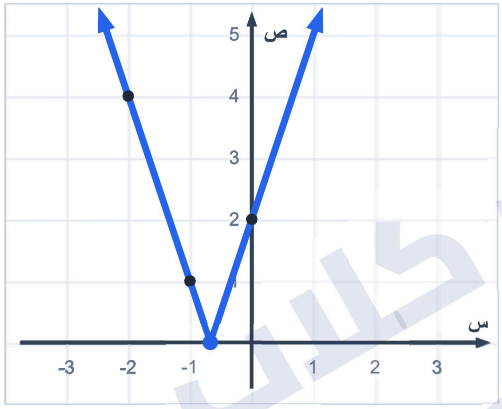
تمارين ومسائل (2 - 6) : اقتران القيمة المطلقة

(1) إذا كان: ق(س) = |س − ٣|، هـ(س) = |٢ − ٣س|، **فأجد:**

- ق(٢) = |٢ − ٣| = |−١| = ١
- ق(−٥) = |−٥ − ٣| = |−٨| = ٨
- هـ(−١) = |٢ − ٣(−١)| = |٣ + ٢| = ٥
- هـ(٠) = |٢ − ٣(٠)| = |٢| = ٢
- ق(٢/٣) = |٢/٣ − ٣| = |−٧/٣| = ٧/٣

(2) أُعيدُ تعريفَ الاقترانات الآتية، دونَ استخدامِ رمزِ القيمةِ المطلقةِ وأمثِّلُها بيانياً:

أ) ق(س) = |٣س + ٢|

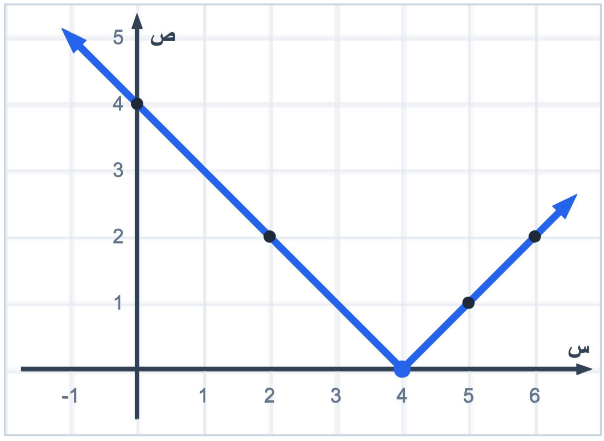


صفر الاقتران: ٣س + ٢ = ٠ ⇐ س = −٢/٣

إعادة التعريف: ق(س) = { ٣س + ٢ ، س ≥ −٢/٣ ; −(٣س + ٢) ، س < −٢/٣ }

- **المجال:** ح
- **المدى:** [٠ ، ∞)
- **الأصفار:** س = −٢/٣

ب) ق(س) = |٤ − س|



صفر الاقتران: ٤ − س = ٠ ⇐ س = ٤

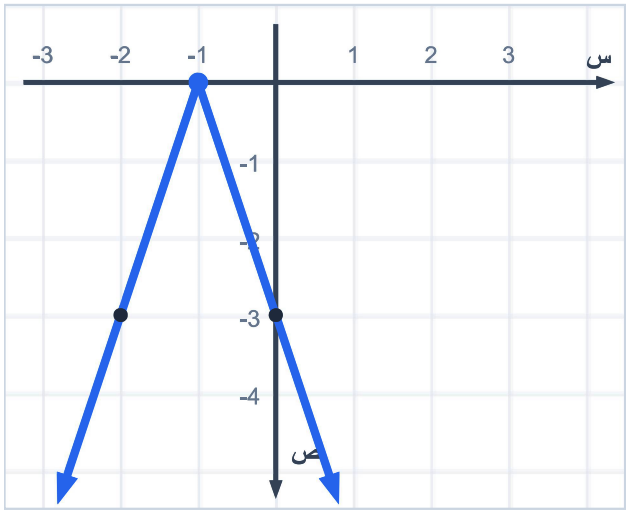
إعادة التعريف:

ق(س) = { ٤ − س ، س ≥ ٤ ; −(٤ − س) = س − ٤ ، س < ٤ }

- **المجال:** ح
- **المدى:** الفترة [٠ ، ∞)
- **الأصفار:** س = ٤

أ. منيب كلاب 00972599570709

جـ) ق(س) = $-|٣س + ٣|$



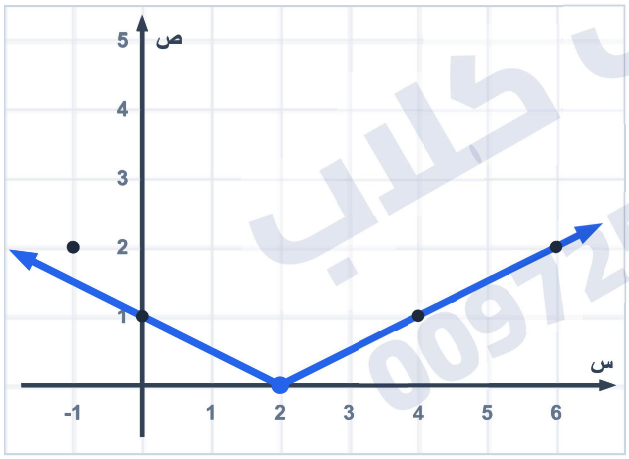
صفر الاقتران: ٣س + ٣ = ٠ ⇐ س = -١

إعادة التعريف:

ق(س) = $\begin{cases} -(٣س + ٣) = -٣س - ٣ & ، \quad س \leq -١ \\ (٣س + ٣) = ٣س + ٣ & ، \quad س > -١ \end{cases}$

- **المجال:** ح
- **المدى:** الفترة $(-\infty ، ٠]$
- **الأصفار:** س = -١

د) ق(س) = $|١ - \frac{١}{٢}س|$



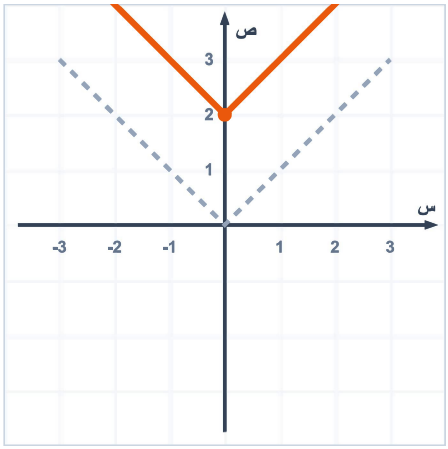
صفر الاقتران: $١ - \frac{١}{٢}س = ٠ \Leftarrow س = ٢$

إعادة التعريف: ق(س) = $\begin{cases} ١ - \frac{١}{٢}س & ، \quad س \geq ٢ \\ \frac{١}{٢}س - ١ & ، \quad س < ٢ \end{cases}$

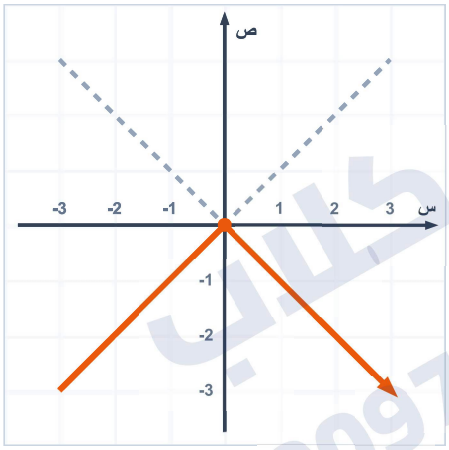
- **المجال:** ح
- **المدى:** الفترة $[٠ ، \infty)$
- **الأصفار:** س = ٢.

أ. منيب كلاب
00972599570709

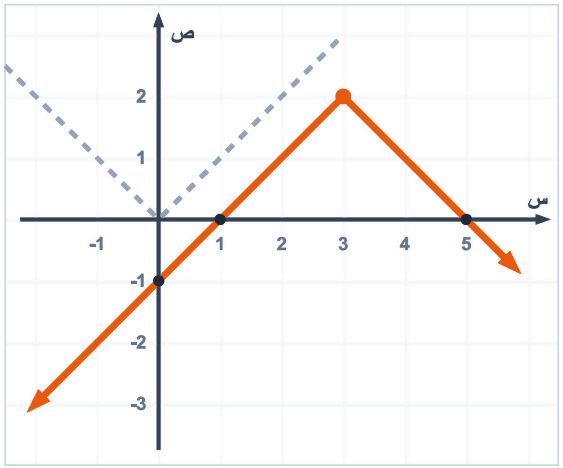
(3) أُمثِّلُ منحنى كُلٍّ من الاقتراناتِ الآتيةِ باستخدامِ التحويلاتِ الهندسية:



▪ **أ)** ق(س) = |س| + ٢: **إنسحاب لمنحنى** ص = |س| **بمقدار وحدتين للأعلى.**



▪ **ب)** ق(س) = −|س|: **انعكاس لمنحنى** ص = |س| **حول محور السينات (فتحة المنحنى للأسفل).**

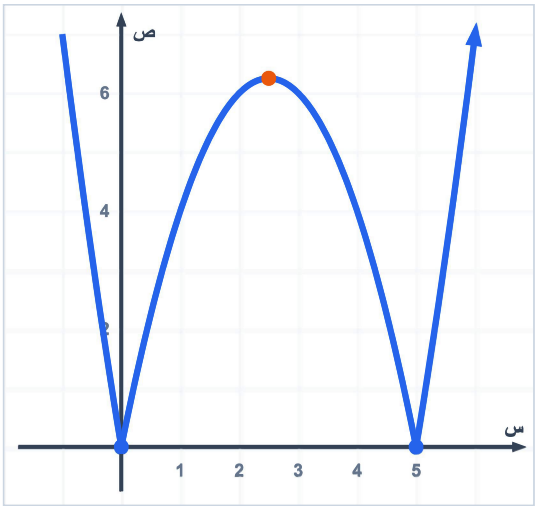


▪ **جـ)** ق(س) = −|س − ٣| + ٢: **إنسحاب لمنحنى** ص = |س| **بمقدار 3 وحدات لليمين، ثم انعكاس حول محور السينات، ثم إنسحاب ووحدتين للأعلى (رأسه عند (٣ ، ٢)).**

أ. منيب كلاب
00972599570709

(4) أُعيدُ تعريفَ كُلٍّ من الاقترانات الآتية ثُمّ أمثِّلُها في المستوى الديكارتي:

أ) $ق(س) = |٥س - س^{٢}|$

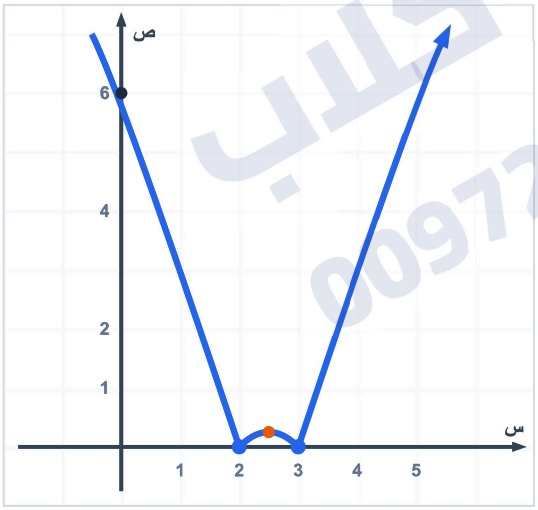


الأصفار: $س(٥ - س) = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، س = ٥$

إعادة التعريف:

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٥س & ، \quad س < ٠ \text{ أو } س > ٥ \\ ٥س - س^{٢} & ، \quad ٠ \leq س \leq ٥ \end{cases}$$

ب) $ق(س) = |س^{٢} - ٥س + ٦|$



الأصفار: $(س - ٢)(س - ٣) = ٠ \Leftarrow س = ٢ ، س = ٣$

إعادة التعريف:

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٥س + ٦ & ، \quad س \geq ٢ \text{ أو } س \leq ٣ \\ -(س^{٢} - ٥س + ٦) & ، \quad ٢ < س < ٣ \end{cases}$$

أ. منيب كلاب
00972599570709

تمارين ومسائل (2 - 7) : اقتران أكبر عدد صحيح

(1) أحلُّ المعادلاتِ الآتيةَ:

أ) $[٣س + ١] = ٤$

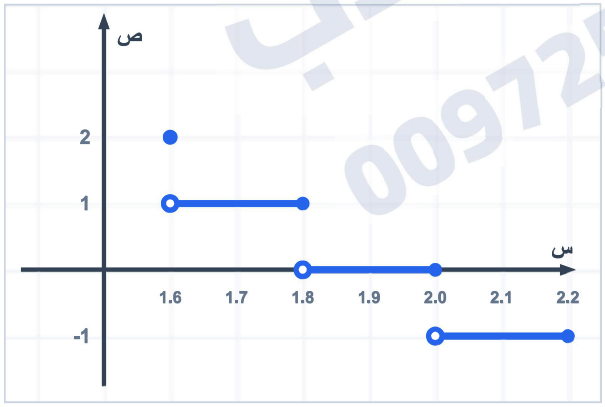
- حسب تعريف أكبر عدد صحيح: $٤ \geq ٣س + ١ > ٥$
- نطرح ١ من جميع الأطراف: $٣ \geq ٣س > ٤$
- نقسم على ٣: $١ \geq س > \frac{٤}{٣}$
- **مجموعة الحل:** $[١ ، \frac{٤}{٣})$

ب) $[٣ - ٢س] = -٤$

- حسب التعريف: $-٤ \geq ٣ - ٢س > -٣$
- نطرح ٣ من جميع الأطراف: $-٧ \geq -٢س > -٦$
- نقسم على -٢ ونعكس إشارات المتباينة: $٣ > س \geq ٣.٥$
- **مجموعة الحل:** $(٣ ، ٣.٥]$

(2) أُمثِّلُ كُلًّا من الاقتراناتِ الآتيةِ:

أ) $ق(س) = [١٠ - ٥س]$



طول الدرجة $ل = \frac{١}{|٥-|} = \frac{١}{٥} = ٠.٢$ .. معامل س سالب

(الدرجات تنازلية ومغلقة من اليمين ومفتوحة من اليسار).

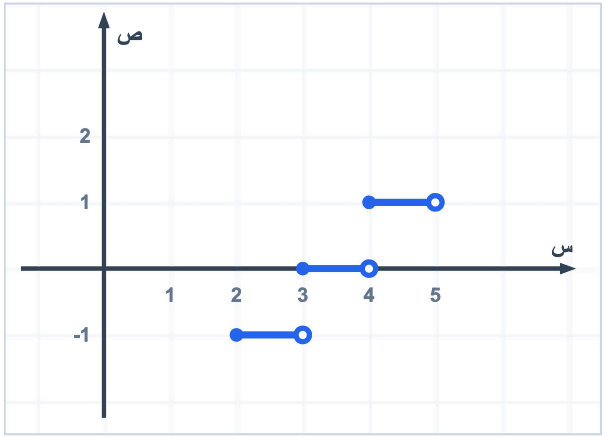
إعادة التعريف في الفترة $[\frac{٨}{٥} ، \frac{١١}{٥}]$:

$$ق(س) = \begin{cases} ٢ & ، \quad س = \frac{٨}{٥} \\ ١ & ، \quad \frac{٨}{٥} > س \geq \frac{٩}{٥} \\ ٠ & ، \quad \frac{٩}{٥} > س \geq ٢ \\ -١ & ، \quad ٢ > س \geq \frac{١١}{٥} \end{cases}$$

أ. منيب كلاب 00972599570709

(2) أُمثّلُ كُلاًّ من الاقتراناتِ الآتيةِ:

ب) هـ(س) = [س − ٣]

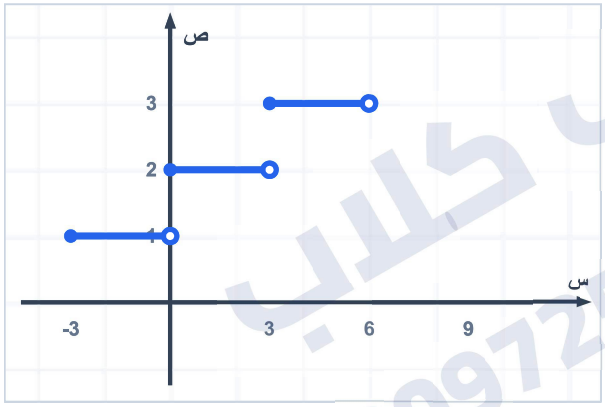


طول الدرجة ل = ١. معامل س موجب (إنسحاب بمقدار 3 وحدات لليمين للدرجة القياسية [س].

إعادة التعريف في الفترة [٢ ، ٥):

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} -١ & ، \quad ٢ \leq س < ٣ \\ ٠ & ، \quad ٣ \leq س < ٤ \\ ١ & ، \quad ٤ \leq س < ٥ \end{cases}$$

جـ) $\text{ق}(س) = [\frac{١}{٣}س + ٢]$



طول الدرجة ل = $\frac{١}{|\frac{١}{٣}|}$ = ٣. الدرجات متزايدة بطول 3 وحدات لكل درجة ومغلقة من اليسار.

إعادة التعريف في الفترة [−٣ ، ٦):

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} ١ & ، \quad -٣ \leq س < ٠ \\ ٢ & ، \quad ٠ \leq س < ٣ \\ ٣ & ، \quad ٣ \leq س < ٦ \end{cases}$$

(3) أتحقَّقُ من خطأ العباراتِ الآتيةِ، بأمثلةٍ عدديةٍ:

أ) جـ × [أ] = [جـ × أ]، حيث أ ، جـ أعداد حقيقية.

- نأخذ مثالاً عدديّاً: نلفرض جـ = ٢.٥، أ = ١.٤
- الطرف الأيمن: جـ × [أ] = ٢.٥ × [١.٤] = ٢.٥ × ١ = ٢.٥
- الطرف الأيسر: [جـ × أ] = [٢.٥ × ١.٤] = [٣.٥] = ٣
- بما أن ٢.٥ ≠ ٣، فالعبارة خاطئة.

ب) [س + ١.٥] = [س] + ١.٥

- نأخذ مثالاً عدديّاً: لنفرض س = ٠.٨
- الطرف الأيمن: [س + ١.٥] = [٠.٨ + ١.٥] = [٢.٣] = ٢
- الطرف الأيسر: [س] + ١.٥ = [٠.٨] + ١.٥ = ٠ + ١.٥ = ١.٥
- بما أن ٢ ≠ ١.٥، فالعبارة خاطئة (لأن الخاصية تصح فقط عند إضافات أعداد صحيحة .

أ. منيب كلاب 00972599570709

تمارين ومسائل (2 - 8) : الاقتران الأسي

(1) أيٌّ من الاقتراناتِ الآتيةِ يُعَدُّ اقتراناً أسّياً؟ مع بيانِ السبب:

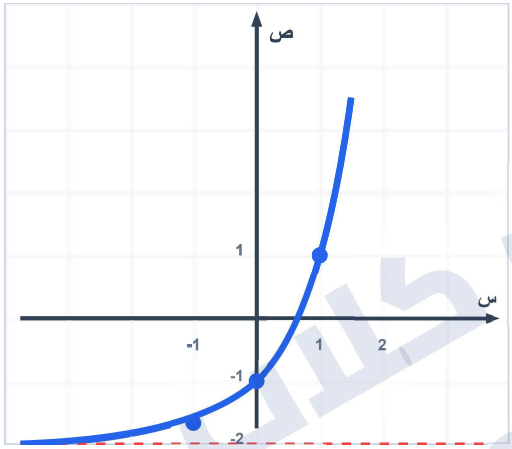
- **أ)** ق(س) = ٥^س : اقتران أسي ، لأن الأساس عدد حقيقي موجب لا يساوي 1 (أ = ٥) والأس متغير.
- **ب)** م(س) = ٤^−س : اقتران أسي ، لأنها تكافئ (١/٤)^س والأساس موجب ولا يساوي 1.
- **جـ)** هـ(س) = ٢س^٣ : ليس اقتراناً أسّياً ، لأنه اقتران كثير حدود (الأساس متغير والأس ثابت).
- **د)** ص = (−٢)^س : ليس اقتراناً أسّياً ، لأن الأساس عدد سالب (أ = −٢ < ٠).
- **هـ)** ص = (٢/٣)^−س : اقتران أسي ، لأنها تكافئ (٣/٢)^س والأساس موجب ولا يساوي 1.

(2) أمثلُ منحنى الاقتراناتِ الآتيةِ في المستوى الديكارتي، وأجدُ مدى كل اقتران منها:

أ) ص = ٣^س − ٢

س	−١	٠	١	٢
ص	−٥/٣	−١	١	٧

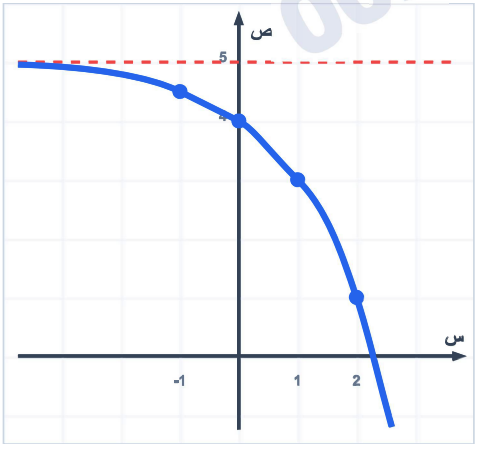
- **المدى:** (−٢ ، ∞)



ب) ص = ٥ − ٢^س

س	−١	٠	١	٢
ص	٩/٢	٤	٣	١

- **المدى:** (−∞ ، ٥)

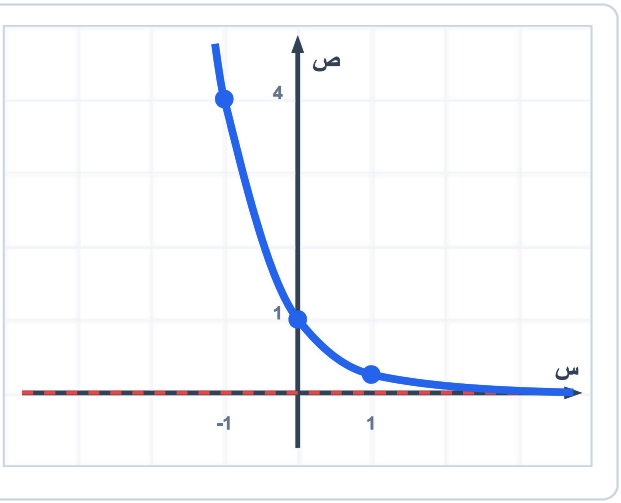


أ. منيب كلاب 00972599570709

(تابع 2) أمثّلُ منحنى الاقتراناتِ الآتيةِ في المستوى الديكارتي، وأجدُ مدى كل اقتران منها:

جـ) $ص = ٤^{-س}$

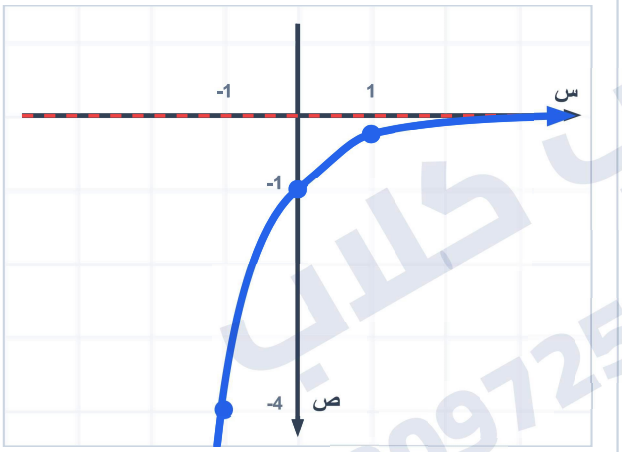
س	−١	٠	١	٢
ص	٤	١	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{١٦}$



- **المدى:** $(٠ ، \infty)$

د) $ص = -\left(\frac{١}{٤}\right)^{س}$

س	−١	٠	١	٢
ص	−٤	−١	$\frac{-١}{٤}$	$\frac{-١}{١٦}$

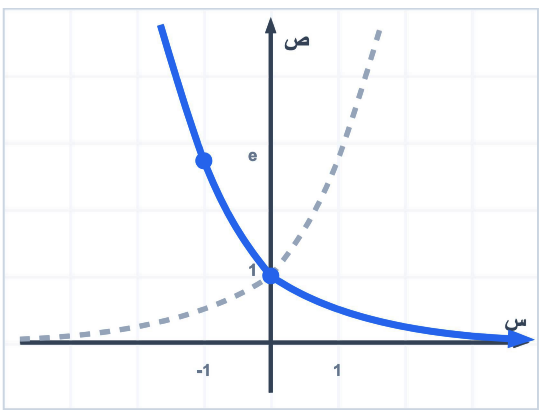


- **المدى:** $(-\infty ، ٠)$

(3) أستخدمُ منحنى $ق(س) = هـ^{س}$ والتحويلات الهندسية لرسم الاقترانات الآتية:

أ) $ق(س) = هـ^{-س}$

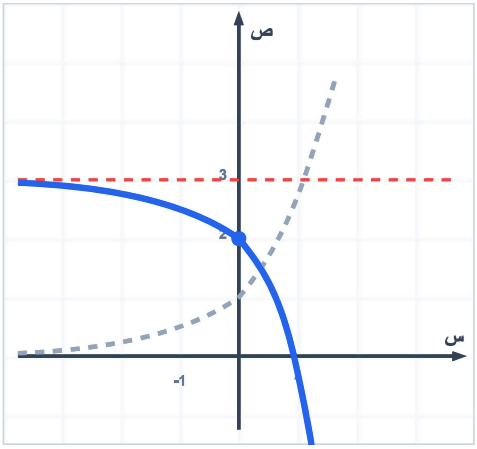
- **التحويل الهندسي:** انعكاس حول محور الصادات.
- **النقطة الأساسية:** $(٠ ، ١)$ تبقى ثابتة.
- **النقطة المساعدة:** $(١ ، هـ)$ تتحول إلى $(-١ ، هـ)$.



أ. منيب كلاب 00972599570709

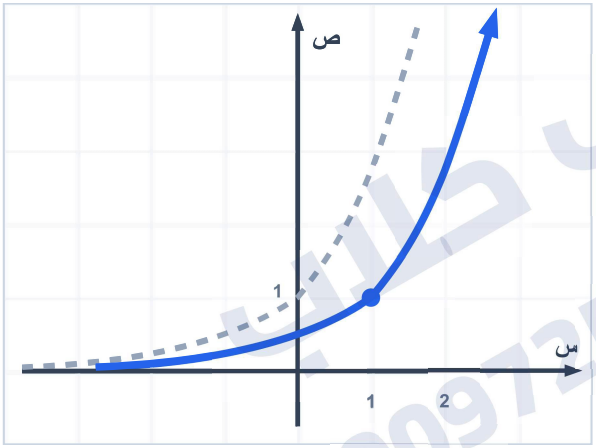
(تابع 3) أستخدمُ منحنى ق(س) = هـ^س والتحويلات الهندسية لرسم الاقترانات الآتية:

ب) جـ(س) = هـ^س − ٣



- **التحويل الهندسي:** انعكاس حول محور السينات، ثم انسحاب للأعلى بمقدار 3 وحدات.
- **النقطة الأساسية:**
(٠ ، ١) انعكاس ← (٠ ، −١) انسحاب ← (٠ ، ٢)

جـ) هـ(س) = هـ^(س−١)



- **التحويل الهندسي:** انسحاب أفقي بمقدار وحدة واحدة نحو اليمين.
- **النقطة الأساسية:** (٠ ، ١) انسحاب ← (١ ، ١)

(4) أجدُ قيمة كلٍّ من: أ ، ب لمنحنى ق(س) = أ(٣)^س + ب، الذي يمرُّ بالنقطتين (١ ، ٣) و (٠ ، ٢):

- نعوض (٠ ، ٢): أ(٣)^٠ + ب = ٢ ⇐ أ + ب = ٢ ـــــ (1)
- نعوض (١ ، ٣): أ(٣)^١ + ب = ٣ ⇐ ٣أ + ب = ٣ ـــــ (2)
- بطرح المعادلة (1) من (2): ٢أ = ١ ⇐ أ = $\frac{١}{٢}$
- وبالتعويض نجد أن: ب = $\frac{٣}{٢}$. إذن: أ = $\frac{١}{٢}$ ، ب = $\frac{٣}{٢}$

أ. منيب كلاب 00972599570709

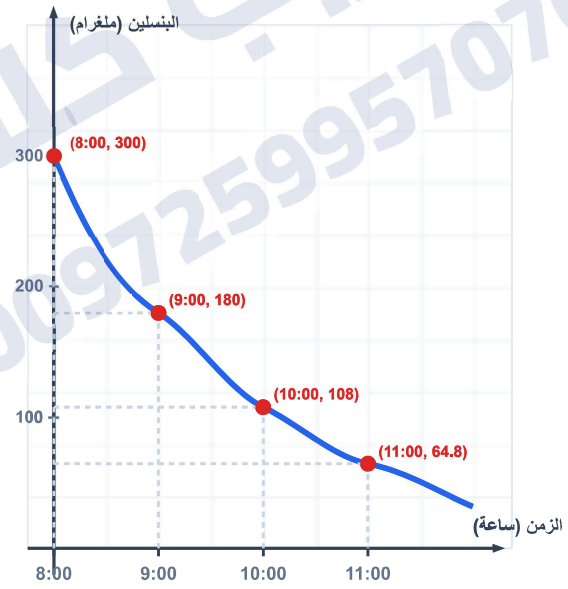
(5) تطبيق علمي (جرعة البنسلين):

أُدْخِلَتْ سيدةٌ مجمَّعَ فلسطينَ الطبيَّ في مدينةِ رام الله، لارتفاعِ نسبةِ الالتهابِ في جسمِها. أُعطِيَتْ جُرْعةً من البنسلين في الدم. لوحِظَ أنَّ 60% من جُرعةِ البنسلين فقط بقيت في الدم بعد مرورِ ساعةٍ على تناولِها. وعند متابعةِ حالتِها لوحِظَ أنَّ جسمَها يُدمِّرُ البنسلين بالنَّمَطِ نفسِهِ، وفي نهايةِ كلِّ ساعةٍ يتبقى فقط 60% من البنسلين الموجودِ في نهايةِ الساعةِ السابقةِ.

إذا أُعطِيَتِ السيدةُ 300 ملغرام من البنسلين الساعة الثامنة صباحاً، أُكمِلُ الجدولَ الآتي (بعد نقله إلى دفتر الإجابة)، لحسابِ كميةِ البنسلين في الدمِ نهايةَ كلِّ ساعةٍ، خلال الفترةِ بين الثامنة والحادية عشرة صباحاً:

الساعة	8:00 صباحاً	9:00 صباحاً	10:00 صباحاً	11:00 صباحاً
البنسلين (ملغرام)	٣٠٠	$\frac{٦٠}{١٠٠} \times ٣٠٠ = ١٨٠$	$\frac{٦٠}{١٠٠} \times ١٨٠ = ١٠٨$	$\frac{٦٠}{١٠٠} \times ١٠٨ = ٦٤.٨$

- أُمثِّلُ البيانات السابقة في المستوى الديكارتي، وأُلاحظُ الشكلَ الناتج:



ملاحظة الشكل والتعليق عليه:

- **شكل المنحنى:** يمثل منحنى أملس متناقصاً من الأعلى إلى الأسفل باتجاه اليمين.
- **سلوك الاقتران:** يمثل الاقتران صورة **تناقص أسّي** وقاعدته العامة هي: $ق(س) = ٣٠٠ \times (\frac{٦}{١٠})^{س}$ حيث $س$ عدد الساعات بعد 8:00 صباحاً.

تمارين ومسائل (2 - 9) : الاقتران اللوغاريتمي

(1) احسب قيمة كلٍّ مما يأتي:

أ) $\log_{3} ٧٢٩$

$\log_{3} ٧٢٩ = \log_{3}(3^{6}) = ٦$

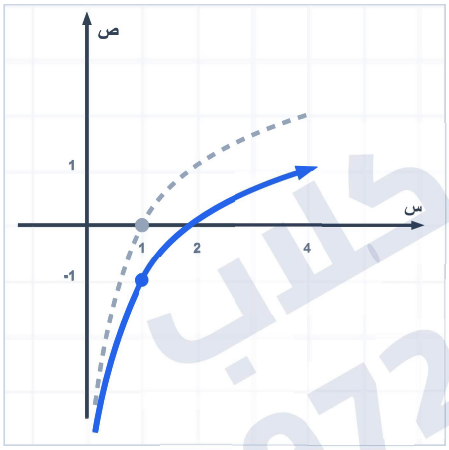
ب) $\log_{5} ٠.٠٠٤$

$\log_{5} ٠.٠٠٤ = \log_{5}(\frac{٤}{١٠٠٠}) = \log_{5}(\frac{١}{٢٥٠}) = \log_{5}(5^{-2}) = -٢$

جـ) $\log_{١٠} ٠.٠٠٠١$

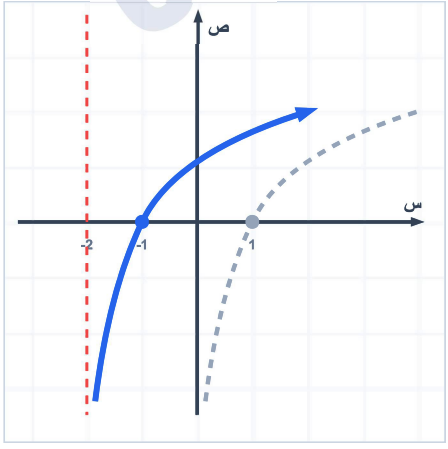
$\log_{١٠} ٠.٠٠٠١ = \log_{١٠}(١٠^{-٤}) = -٤$

(2) مستعيناً بالتحويلات الهندسية ومنحنى الاقتران $ق(س) = \log_{2} س$**، أمثل الاقترانات الآتية:**



أ) $هـ(س) = \log_{2} س - ١$

- **التحويل الهندسي:** انسحاب لمنحنى $ق(س) = \log_{2} س$ بمقدار وحدة واحدة إلى الأسفل.
- **النقطة الأساسية:** $(١ ، ٠)$ انسحاب أسفل $\leftarrow (١ ، -١)$

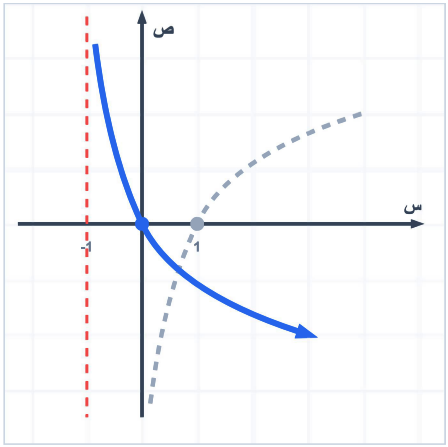


ب) $ل(س) = \log_{2}(س + ٢)$

- **التحويل الهندسي:** انسحاب لمنحنى $ق(س) = \log_{2} س$ بمقدار وحدتين إلى اليسار.
- **النقطة الأساسية:** $(١ ، ٠)$ انسحاب يسار $\leftarrow (-١ ، ٠)$

أ. منيب كلاب 00972599570709

(تابع 2) مستعيناً بالتحويلات الهندسية ومنحنى الاقتران ق(س) = لوم س، **أمثل الاقترانات الآتية:**



جـ) م(س) = − لوم(س + ١)

- **التحويل الهندسي:** انسحاب بمقدار وحدة واحدة يساراً، ثم انعكاس حول محور السينات.
- **النقطة الأساسية:**

(١ ، ٠) انسحاب ← (٠ ، ٠) انعكاس ← (٠ ، ٠)

(3) أجد مجال كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = لوم(٥س − س٢)

شرط ما داخل اللوغاريتم: ٥س − س٢ > ٠

المعادلة المرافقة: س(٥ − س) = ٠ ⇐ س = ٠ أو س = ٥

المجال = الفترة المفتوحة (٠ ، ٥)

ب) ق(س) = لوم ٧√(٢س − ٣)

شرط ما داخل اللوغاريتم أن يكون موجباً: ٢س − ٣ > ٠ ⇐ ٢س > ٣

المجال = (٣/٢ ، ∞)

(4) بدأ عالِمٌ تجربته بـ 5000000 خليةٍ، ولاحظ أنَّ 45% من الخلايا تموت كلَّ دقيقة. كم تستغرق من الزمن حتى يصبح عددها أقلَّ من 1000 خلية؟

أولاً: التتبع وبناء الاقتران

- **العدد الابتدائي (ن = ٠):** أ٠ = ٥٠٠٠٠٠٠ خلية.
- **نسبة المتبقي:** ١٠٠% − ٤٥% = ٥٥% = ٠.٥٥
- **بعد دقيقة (ن = ١):**

أ(١) = ٥٠٠٠٠٠٠ × ٠.٥٥ = ٢٧٥٠٠٠٠

- **بعد دقيقتين (ن = ٢):**

أ(٢) = ٥٠٠٠٠٠٠ × (٠.٥٥)٢ = ١٥١٢٥٠٠

الاقتران الأسّي: أ(ن) = ٥٠٠٠٠٠٠ × (٠.٥٥)ن

ثانياً: حل المتباينة لحساب الزمن

المطلوب أن يكون عدد الخلايا أ < ١٠٠٠:

٥٠٠٠٠٠٠ × (٠.٥٥)ن < ١٠٠٠

⇐ (٠.٥٥)ن < ١٠٠٠/٥٠٠٠٠٠٠ = ٠.٠٠٠٢

بأخذ اللوغاريتم للطرفين والقسمة على لو(٠.٥٥)

(عكس المتباينة لأن الناتج سالب):

ن > لو(٠.٠٠٠٢)/لو(٠.٥٥) ≈ −٣.٦٩٩٠/−٠.٢٥٩٦ ≈ ١٤.٢٥

النتيجة: يستغرق 15 دقيقة تقريباً ليكون عدد الخلايا أقل من 1000.

أ. منيب كلاب 00972599570709

تمارين عامة

السؤال الأول: أضعُ دائرةً حولَ رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1) ما قاعدة الاقتران الناتجة من انسحاب منحنى ق(س) وحدتين إلى اليسار، ثم وحدتين إلى الأعلى؟

- انسحاب وحدتين لليسار: نُستبدل س بـ (س + ٢).
- انسحاب وحدتين للأعلى: نضيف ٢ للخارج.

الخيار الصحيح: جـ) ق(س + ٢) + ٢

2) ما صورة منحنى ق(س) المعكوس في محور السينات، من منحنيات الاقترانات الآتية؟

الانعكاس حول محور السينات يُضرب الاقتران كلياً بسالب خارج القوس: −ق(س).

الخيار الصحيح: جـ) −ق(س)

3) ما طول درجة الاقتران ق(س) = [٣ − ٢س]؟

طول الدرجة ل = $\frac{١}{|\text{معامل س}|} = \frac{١}{|-٢|} = \frac{١}{٢}$.

الخيار الصحيح: أ) $\frac{١}{٢}$

4) أيٌّ من الاقترانات الآتية اقترانٌ نسبيٌّ؟

الاقتران النسبي هو نسبة بين كثيري حدود: ق(س) = $\frac{١}{\text{س}}$ حيث المقام ليس صفراً.

الخيار الصحيح: ج) $\frac{١}{\text{س}}$

5) أيٌّ من الاقترانات الآتية اقترانٌ أُسّيٌّ؟

الاقتران الأسّي تكون فيه المتغيرة في الأس والأساس عدد موجب لا يساوي 1: ه^{س}.

الخيار الصحيح: د) ه^{س}

6) أيٌّ من الاقترانات الآتية ليس اقتراناً لوغاريتمياً؟

الأساس يجب أن يكون عدداً موجباً ولا يساوي 1، في الخيار (د) الأساس 1.

الخيار الصحيح: د) ق(س) = لو$_{\text{س}}$ س

8) محور تماثل ق(س) = |١٠ − ٢س| هو الخط المستقيم:

صفر القيمة المطلقة: ١٠ − ٢س = ٠ ⇐ ٢س = ١٠ ⇐ س = ٥.

الخيار الصحيح: أ) س = ٥

9) أيٌّ من الآتية خطُّ إشارة الاقتران ق(س) = (س − ١)(١ − س)؟

ق(س) = −(س − ١)^{٢}، صفر الاقتران هو س = ١ مكرر، والإشارة سالبة دائماً على طرفي الجذر ومساوية للصفر عند 1.

الخيار الصحيح: أ) (خط إشارة سالبة بالكامل مع zero عند 1)

10) ليكن: ق(س) = |٣س + ٤|، فما قيمة ق(−٣)؟

ق(−٣) = |٣(−٣) + ٤| = |−٩ + ٤| = |−٥| = ٥.

الخيار الصحيح: جـ) ٥

أ. منيب كلاب 00972599570709

السؤال الثاني: **أدرش سلوك الاقتران** ق(س) = لو٢(٢س + ٣) **من حيث: مجاله، ومداه، وكل من المقطعين السيني والصادي.**

1. المجال:

٢س + ٣ > ٠ ⇐ ٢س > −٣ ⇐ س > $-\frac{٣}{٢}$

المجال = $(-\frac{٣}{٢}\ ،\ \infty)$

2. المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

3. المقطع السيني (ص = ٠):

لو٢(٢س + ٣) = ٠ ⇐ ٢س + ٣ = ٢^٠ = ١

٢س = −٢ ⇐ س = −١ **النقطة:** (−١ ، ٠)

4. المقطع الصادي (س = ٠):

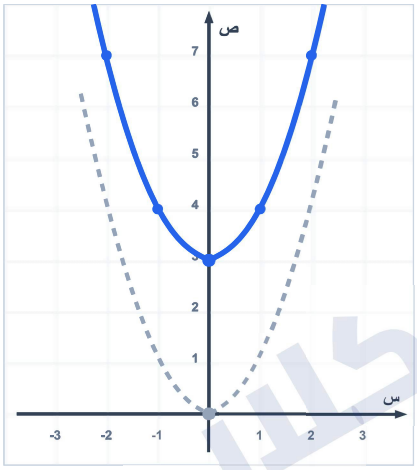
ص = لو٢(٠ + ٣) = لو٢ ٣ ≈ ١.٥٨ **النقطة:** (٠ ، لو٢ ٣)

(3) أمثّلُ منحنيات الاقترانات الآتية بيانيّاً مستعيناً بالتحويلات الهندسيّة المباشرة:

أ) ت(س) = س^٢ + ٣

- **التحويل الهندسي:** انسحاب لمنحنى ق(س) = س^٢ بمقدار 3 وحدات للأعلى.
- **رأس المنحنى:** (٠ ، ٠) انسحاب للأعلى ← (٠ ، ٣)
- **نقاط أساسية:**

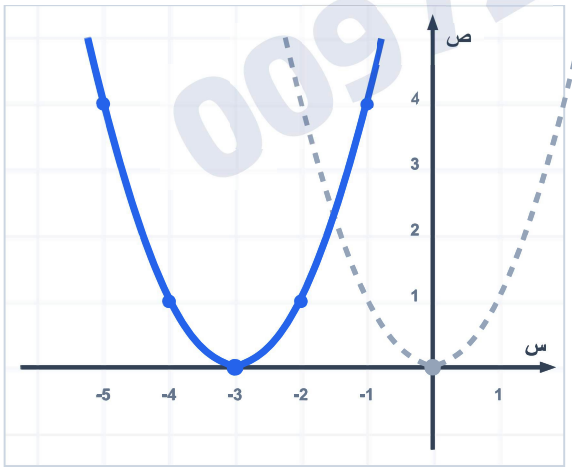
(٠ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (−١ ، ٤) ، (٢ ، ٧) ، (−٢ ، ٧)



ب) هـ(س) = (س + ٣)^٢

- **التحويل الهندسي:** انسحاب لمنحنى ق(س) = س^٢ بمقدار 3 وحدات إلى اليسار.
- **رأس المنحنى:** (٠ ، ٠) انسحاب لليسار ← (−٣ ، ٠)
- **نقاط أساسية:**

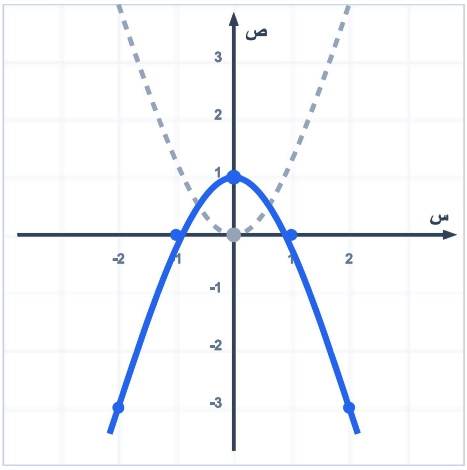
(−٣ ، ٠) ، (−٢ ، ١) ، (−٤ ، ١) ، (−١ ، ٤) ، (−٥ ، ٤)



أ. منيب كلاب 00972599570709

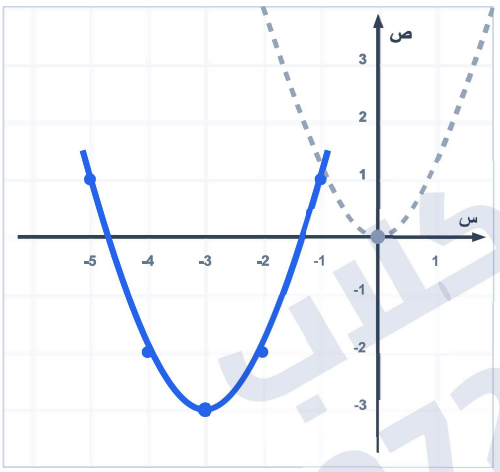
(تابع 3) أمثّل منحنيات الاقترانات الآتية بيانيّاً مستعيناً بالتحويلات الهندسيّة المباشرة:

جـ) ل(س) = −(س² − ١) = −س² + ١



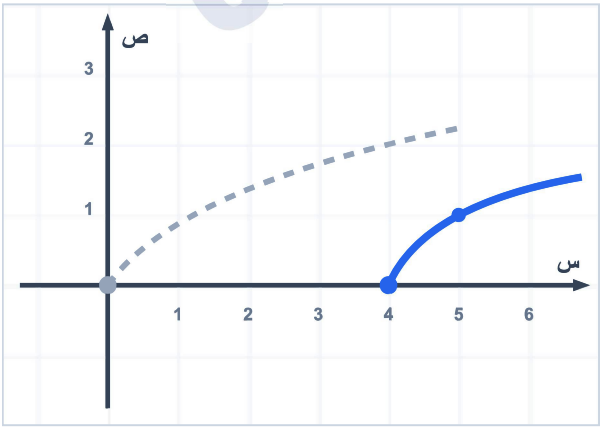
- **التحويل الهندسي:** انعكاس حول محور السينات لمُنحنى ق(س) = س² ثم انسحاب وحدة للأعلى.
- **رأس المنحنى:**
(٠ ، ٠) انعكاس ← (٠ ، ٠) انسحاب ← (٠ ، ١)
- **نقاط أساسية:**
(٠ ، ١) ، (١ ، ٠) ، (−١ ، ٠) ، (٢ ، −٣) ، (−٢ ، −٣)

د) ك(س) = (س + ٣)² − ٣



- **التحويل الهندسي:** انسحاب لمنحنى ق(س) = س² بمقدار 3 وحدات لليسار و3 وحدات للأسفل.
- **رأس المنحنى:**
(٠ ، ٠) انسحاب لليسار ← (−٣ ، ٠) انسحاب للأسفل ← (−٣ ، −٣)
- **رأس المنحنى:** (−٣ ، −٣)
- **نقاط أساسية:**
(−٣ ، −٣) ، (−٢ ، −٢) ، (−٤ ، −٢) ، (−١ ، ١) ، (−٥ ، ١)

هـ) هـ(س) = $\sqrt{س - ٤}$ ، س ≤ ٤



- **التحويل الهندسي:** انسحاب لمنحنى الجذر التربيعي ق(س) = $\sqrt{س}$ بمقدار 4 وحدات لليمين.
- **نقطة البداية:** (٠ ، ٠) انسحاب لليمين ← (٤ ، ٠)
- **نقاط أساسية:** (٤ ، ٠) ، (٥ ، ١) ، (٨ ، ٢)

أ. منيب كلاب 00972599570709

السؤال الرابع: **أبحثُ في إشارة كلٍّ من الاقترانات الآتية:**

أ) ل(س) = س^{٢} + ٣س + ٢

أصفار الاقتران : (س + ١)(س + ٢) = ٠ ⇐ س = −١ ، س = −٢

الإشارة: موجبة على (−∞ ، −٢) ∪ (−١ ، ∞)، **وسالبة على الفترة** (−٢ ، −١)، **وصفر عند** س = −١ ، −٢.



ب) م(س) = ٨ − ٢س

صفر الاقتران: ٨ − ٢س = ٠ ⇐ س = ٤

الإشارة: موجبة عندما س < ٤، **وسالبة عندما** س > ٤ **(لأن إشارة معامل س سالبة)، وصفر عند** س = ٤.



جـ) ق(س) = $\frac{\text{ل(س)}}{\text{م(س)}} = \frac{\text{س}^{٢}+٣\text{س}+٢}{٨-٢\text{س}}$

الأصفار : س = −٢ ، −١ **(أصفار البسط)،** س = ٤ **(صفر المقام/غير معرّف).**

دراسة إشارة القسمة: موجبة على (−∞ ، −٢) ∪ (−١ ، ٤)، **وسالبة على** (−٢ ، −١) ∪ (٤ ، ∞).



السؤال الخامس: **أجدُ مجموعة حلّ المتباينة:** (س − ١)^{٢} − ٤ ≥ ٠، **ثمّ أُمثّلها على خطّ الأعداد.**

فك المتباينة: (س^{٢} − ٢س + ١) − ٤ ≥ ٠ ⇐ س^{٢} − ٢س − ٣ ≥ ٠

تحليل عبارتها: (س − ٣)(س + ١) ≥ ٠

الجذران هما س = −١ ,س = ٣. **تكون الإشارة سالبة أو صفراً بين الجذرين وفي أطرافهما المقفلة.**

مجموعة الحل: **الفترة المغلقة** [−١ ، ٣].



أ. منيب كلاب 00972599570709

السؤال السادس: أكتبْ الاقترانات الآتية باعتبارها اقتراناتٍ متعدّدة القاعدة ثم أُمثّلها بيانيّاً:

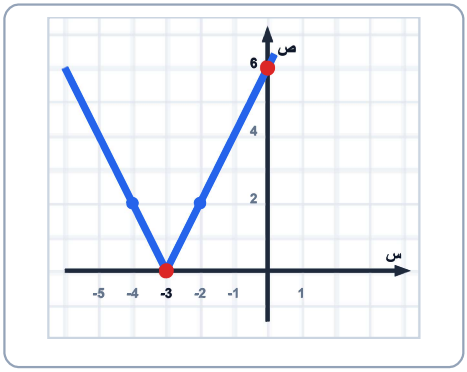
أ) $ق(س) = |٢س + ٦|$

صفر الاقتران: $٢س + ٦ = ٠ \Leftarrow س = -٣$

إعادة التعريف:

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س + ٦ & ، \quad س \geq -٣ \\ -(٢س + ٦) & ، \quad س < -٣ \end{cases}$$

النقاط المستخدمة للرسم: $(-٣ ، ٠)$ **[الرأس]**، $(-٤ ، ٢)$، $(-٢ ، ٢)$، $(٠ ، ٦)$.



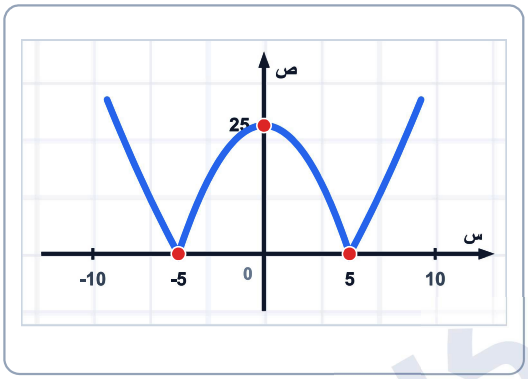
ب) $ل(س) = |س^٢ - ٢٥|$

الأصفار: $س = \pm ٥$

إعادة التعريف:

$$ل(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢٥ & ، \quad س \geq -٥ \text{ أو } س \leq ٥ \\ -(س^٢ - ٢٥) & ، \quad -٥ > س > ٥ \end{cases}$$

النقاط المفصلية: $(-٥ ، ٠)$، $(٥ ، ٠)$، **والقمة المنعكسة عند** $(٠ ، ٢٥)$.

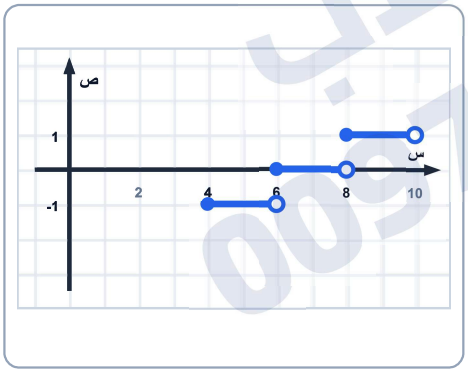


جـ) $ك(س) = [\frac{١}{٢}س - ٣]$

طول الدرجة: $ل = ٢$، **البداية مغلقة والأنهاية مفتوحة (معامل** $س$ **موجب).**

إعادة التعريف بالتفصيل:

$$ك(س) = \begin{cases} -١ & ، \quad ٤ \leq س < ٦ \\ ٠ & ، \quad ٦ \leq س < ٨ \\ ١ & ، \quad ٨ \leq س < ١٠ \end{cases}$$

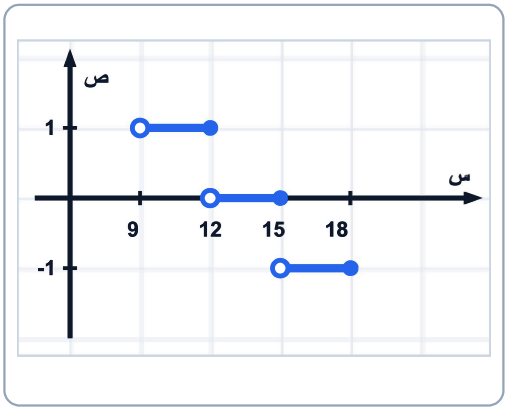


د) $هـ(س) = [\frac{١}{٣}س - ٥]$

طول الدرجة: $ل = ٣$، **معامل** $س$ **سالب (بداية الفترة مفتوحة ونهايتها مغلقة).**

إعادة التعريف الصحيحة:

$$هـ(س) = \begin{cases} ١ & ، \quad ٩ < س \leq ١٢ \\ ٠ & ، \quad ١٢ < س \leq ١٥ \\ -١ & ، \quad ١٥ < س \leq ١٨ \end{cases}$$



أ. منيب كلاب 00972599570709

السؤال السابع: **طارق صاحب محلات لبيع الملابس الرياضية، طلب من محاسب محلاته تزويده بعلاقة رياضية تربط ربحه السنوي بسعر القطعة. وبعد دراسة الوضع لاحظ المحاسب أن المحل يبيع عدداً أكبر من القطع عندما يخفض السعر، لكن ربحه يتغير حسب المعادلة:**

$$ص = -١٥س^{٢} + ٦٠٠س + ٥٠$$

حيث س سعر الزي الرياضي بالدينار.

▪ **جد ربح التاجر إذا باع الزي الرياضي بسعر 25 ديناراً:**

$ص = -١٥(٢٥)^{٢} + ٦٠٠(٢٥) + ٥٠ = ٥٦٧٥$ **ديناراً.**

▪ **جد ربح التاجر إذا باع الزي الرياضي بسعر 42 ديناراً:**

$ص = -١٥(٤٢)^{٢} + ٦٠٠(٤٢) + ٥٠ = -١٢١٠$ **دينار (خسارة).**

▪ **حدد مجال الأسعار التي تحقق ربحاً للتاجر:**

شرط الربح: $ص > ٠ \Leftarrow -١٥س^{٢} + ٦٠٠س + ٥٠ > ٠$

أصفار الاقتران بالقانون العام: $س = \frac{-٦٠٠ \pm \sqrt{٦٠٠^{٢} - ٤(-١٥)(٥٠)}}{(-١٥)٢}$

$س = \frac{-٦٠٠ \pm \sqrt{٣٦٣٠٠٠}}{-٣٠} \Leftarrow س_{١} \approx -٠.٠٨$ (مرفوض)، $س_{٢} \approx ٤٠.٠٨$

بما أن السعر موجب $س > ٠$، فإن الإشارة تكون موجبة بين الأصفار.

مجال الأسعار: $س \in (٠، ٤٠.٠٨)$ **دينار تقريباً.**

▪ **ما هو السعر الذي يحقق للتاجر أعلى ربح:**

أعلى ربح يتحقق عند رأس منحنى الاقتران التربيعي $س = \frac{-ب}{٢أ}$:

$س = \frac{-٦٠٠}{٢(-١٥)} = \frac{-٦٠٠}{-٣٠} = ٢٠$ **ديناراً (السعر للأعلى ربح).**

تعويض السعر في المعادلة لإيجاد قيمة أعلى ربح:

$ص = -١٥(٢٠)^{٢} + ٦٠٠(٢٠) + ٥٠$

$ص = -١٥(٤٠٠) + ١٢٠٠٠ + ٥٠ = -٦٠٠٠ + ١٢٠٠٠ + ٥٠ = ٦٠٥٠$

أعلى ربح ممكن: ٦٠٥٠ ديناراً عند سعر ٢٠ ديناراً للقطعة.

أ. منيب كلاب 00972599570709